Capitolo 6

Il lavoro di un gas

QUESITI E PROBLEMI

1 Si discuta la seguente asserzione: il lavoro termodinamico è considerato positivo se è il sistema a compierlo sull'esterno, negativo se viene compiuto dall'esterno sul sistema.

2 Il lavoro compiuto da un sistema sull'ambiente circostante e il lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema hanno sempre somma zero (*vero/falso*).

3 Un fluido può compiere lavoro anche se il suo volume si mantiene costante durante l'intera trasformazione (*vero/falso*).

4 Si spieghi in quale eventualità il lavoro compiuto da un gas tra uno stato 1 e uno stato 2 è $L = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V$.

5 Se la trasformazione di un gas è descrivibile da un'equazione, il lavoro compiuto dal gas è senz'altro dato dall'integrale $\int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V$ (*vero/falso*).

6 Un gas perfetto di volume iniziale $0{,}03 \text{ m}^3$ viene riscaldato reversibilmente sotto pressione costante $p = 1{,}35 \times 10^5$ Pa fino al raddoppio del volume. Si determini il lavoro compiuto dal gas.

7 Due moli di gas perfetto vengono raffreddate sotto pressione costante da 150 a 25 °C. Determinare il lavoro compiuto dal gas.

8 Un gas subisce una trasformazione reversibile rappresentata nel piano pV da un segmento rettilineo: inizialmente è $p_1 = 0{,}4 \times 10^5$ Pa, $V_1 = 5$ ℓ, alla fine è $p_2 = 1{,}2 \times 10^5$ Pa, $V_2 = 1{,}5$ ℓ. Determinare il lavoro compiuto dal gas.

9 In generale, il lavoro compiuto da un gas in relazione alle variazioni del volume dipende anche dalla variabile tempo: a parità, per esempio, di ogni altra circostanza, il solo fatto che il volume cambi lentamente o rapidamente è già sufficiente a modificare il valore del lavoro effettuato (*vero/falso*).

10 Calcolare il lavoro compiuto da un gas perfetto che si espande reversibilmente a temperatura costante fino al dimezzamento della pressione. Le condizioni iniziali di pressione e volume sono $p_1 = 2{,}2 \times 10^5$ Pa, $V_1 = 1{,}8$ ℓ.

11 Se sappiamo che, nell'ambito di una trasformazione reversibile, il volume finale di un gas è uguale a quello iniziale, possiamo affermare che il lavoro compiuto dal gas è zero (*vero*/*falso*).

12 Si determini il lavoro compiuto da un gas *reale* che subisce la trasformazione $A \to B \to C \to A$ rappresentata in fig. 3.

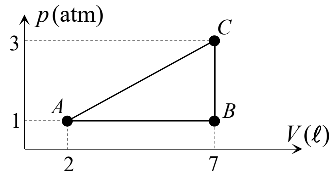

Fig. 3

13 Se, alla fine di una trasformazione, il volume di un gas è più grande di quello iniziale, il lavoro che il gas ha complessivamente compiuto in relazione alla variazione del volume è sicuramente positivo (*vero*/*falso*).

14 Un gas reale, inizialmente nello stato A, subisce poi una trasformazione ciclica rappresentata nel piano p,V (fig. 4) da una circonferenza percorsa in senso antiorario. Determinare il lavoro compiuto dal gas.

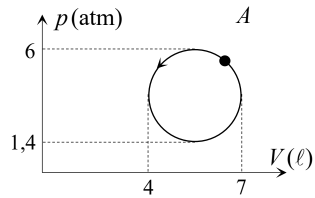

Fig. 4

15 Supponiamo che l'equazione di stato di un non precisato sistema termodinamico sia $pV = AT^3 + BT$, con A e B costanti, e supponiamo che nel corso di una trasformazione isobara il valore della temperatura vari da T_1 a T_2. Quale lavoro verrebbe compiuto dal sistema in relazione alla variazione del volume?

16 Un gas reale subisce una trasformazione di equazione $pV^3 = \text{cost}$. Sapendo che la pressione iniziale è 5×10^5 Pa, e che con la trasformazione il volume aumenta da 1,2 a 1,9 ℓ, determinare il lavoro compiuto dal gas.

17 Un gas perfetto monoatomico, che inizialmente occupa un volume di 1,8 ℓ sotto una pressione di 1,3 atm, subisce una compressione adiabatica reversibile fino al dimezzamento del volume. Determinare il lavoro compiuto dal gas.

18 Un certo quantitativo di materiale gassoso è in equilibrio all'interno di un contenitore cilindrico, chiuso superiormente da un pistone che può scorrere senza attrito. A un tratto un blocco viene appoggiato sul pistone (fig. 5), e conseguentemente il volume del gas passa dal valore iniziale V_1 al valore finale $V_2 < V_1$, mentre la pressione passa da p_1 a $p_2 > p_1$. Si dimostri che il lavoro compiuto dal gas è $L = p_2(V_1 - V_2)$.

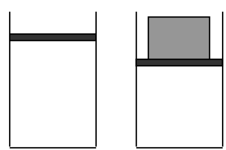
Fig. 5

RISPOSTE

1 L'affermazione è priva di senso: il lavoro compiuto dal sistema, vale a dire dalle forze che il sistema esercita su corpi che non fanno parte del sistema, può essere, a seconda dei casi, sia positivo che negativo (si pensi alla spinta di un gas sul pistone di chiusura di un recipiente cilindrico: il lavoro compiuto dal gas è positivo se lo spostamento del pistone ha la stessa direzione della forza, altrimenti è negativo). Analogamente, può risultare sia positivo che negativo il lavoro compiuto sul sistema da parte di forze esterne ad esso applicate.

2 Falso: l'affermazione vale *solo per interazioni a contatto*. Ad esempio, hanno sicuramente somma zero il lavoro compiuto da un pistone mobile sul gas contenuto nel cilindro e il lavoro compiuto dal gas sul pistone. Si noti che se il gas venisse rimescolato mediante apposito dispositivo, le pareti del contenitore compirebbero sul gas che scorre su di esse un certo lavoro resistente d'attrito a cui fa riscontro un lavoro d'attrito uguale e contrario da parte del gas (lavoro che chiaramente non si ricollega a spostamenti macroscopici d'assieme a livello delle pareti, ma trova comunque riscontro nell'effetto di riscaldamento prodotto): *il lavoro complessivo delle forze d'attrito su due corpi a contatto è sempre zero*. Se invece lasciamo cadere un sasso, la forza con cui la Terra attrae il sasso compie lavoro, ma la forza uguale ed opposta con cui il sasso attrae la Terra non compie evidentemente alcun lavoro.

3 Vero. Se mettiamo in funzione un ventilatore, l'aria contenuta nella stanza compie un lavoro resistente senza che il suo volume subisca variazioni. Scaldando l'aria (o l'acqua) possiamo produrre una corrente convettiva ascensionale capace di mettere in moto una ruota a pale: il fluido compie in tal caso un lavoro motore senza alcuna variazione del suo volume. Se affondiamo in acqua un pezzo di legno o un turacciolo, e poi lo lasciamo andare, la spinta di Archimede porta verso l'alto l'oggetto compiendo un lavoro positivo, senza variazione alcuna nel volume del liquido.

4 La relazione, che presuppone una definizione univoca della pressione, vale solo nel caso di trasformazioni reversibili (o schematizzabili come tali); e solo se, come normalmente accade, la pressione si può considerare uguale in tutti i punti della massa gassosa, indipendentemente dalla quota. Se infatti gli stati intermedi sono, a tutti gli effetti pratici, indistinguibili da stati di equilibrio, le forze esercitate dal gas sulle pareti del contenitore sono necessariamente perpendicolari alla superficie su cui agiscono[1], perciò compiono lavoro solo se una parete si sposta, con conseguente variazione del volume (si pensi al caso tipico del pistone di chiusura di un contenitore cilindrico). Anche lo spostamento di un oggetto all'interno della massa gassosa, senza variazione del volume del gas, non comporta in questo caso

---

[1] Pro memoria: un fluido in quiete è privo di viscosità, perciò non può restare in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie che non siano perpendicolari alla superficie, e reciprocamente è in grado di esercitare solo forze perpendicolari alla sua superficie.

(trasformazione reversibile) lavoro da parte del gas: trattandosi per ipotesi di un movimento infinitamente lento, il gas è sempre in equilibrio e quindi non può esercitare forze tangenziali d'attrito ma solo forze di pressione[2].

5 Vero. Il fatto che, attraverso l'equazione, ci si riferisca in modo univoco alla pressione o alla temperatura, senza specificazione di un punto particolare del sistema, significa che, nel corso della trasformazione, la pressione e la temperatura sono in qualsiasi istante uguali per tutti i punti: ciò corrisponde a dire che la massa gassosa è in ogni istante in equilibrio, e che pertanto la trasformazione considerata è reversibile. Il lavoro del gas è in tal caso esclusivamente legato alle variazioni di volume (si veda la risposta precedente).

6 Trattandosi di una trasformazione isobara (fig. 6) l'integrale della pressione rispetto al volume (l'area sottesa dal grafico della trasformazione nel piano p,V) è semplicemente $p\,(V_2 - V_1) = p\,(2V_1 - V_1) = pV_1$. Perciò $L = 1{,}35 \times 10^5$ Pa $\times$ 0,03 m^3 = 4050 J.

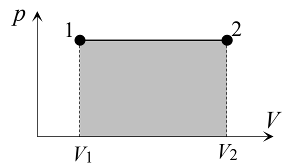

Fig. 6

7 Come nel caso precedente, il lavoro del gas è $L = p\,(V_2 - V_1)$. Trattandosi di un gas perfetto ($pV = nRT$), la stessa relazione si può scrivere nella forma $L = nR(T_2 - T_1)$, da cui $L = -(2 \times 8{,}31 \times 125)$ J $= -2{,}08 \times 10^3$ J.

8 Il lavoro compiuto dal gas corrisponde all'area del trapezio ombreggiato in fig. 7, presa col segno meno (il volume infatti diminuisce, il pistone si sposta in senso contrario alla spinta del gas). Sarà pertanto $L = -[(p_1 + p_2)/2]\,(V_1 - V_2) = -280$ J.

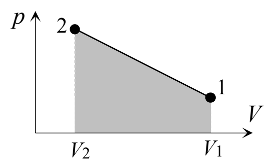

Fig. 7

9 Vero. Consideriamo ad esempio il gas contenuto in un cilindro adiabatico chiuso superiormente da un pistone mobile: se il pistone effettua uno stesso spostamento verso il basso in modo più rapido, il lavoro compiuto dal pistone sul gas, e dal gas sul pistone, è più grande perché è più grande la pressione che il pistone in movimento esercita sul gas, e il gas sul pistone: è infatti maggiore la velocità relativa tra pistone e molecole che colpiscono il pistone, e di conseguenza anche la violenza e la frequenza degli urti.

Quando invece il pistone si sposta verso l'alto, a parità di spostamento il lavoro è tanto *minore* quanto più rapido è il movimento: al limite, se il pistone si spostasse con velocità così grande da non poter essere raggiunto e colpito da nessuna molecola, il lavoro del gas sarebbe zero, come quando il gas si espande liberamente nel vuoto.

---

[2] Il cui risultante su un oggetto completamente circondato dal gas – la spinta d'Archimede – è peraltro zero per il fatto che per ipotesi la pressione non dipende dalla quota, ed è quindi uguale sia sopra che sotto l'oggetto in movimento.

10 Il lavoro di un gas perfetto in un'isoterma è $L = nRT\ln(V_2/V_1)$, relazione che possiamo anche scrivere nella forma $L = p_1V_1 \ln(V_2/V_1)$, oppure nella forma $L = p_1V_1 \ln(p_1/p_2)$ dato che, se non varia la temperatura, pressione e volume di un gas perfetto sono inversamente proporzionali. Introducendo i dati, si ottiene $L = 2{,}2 \times 10^5$ Pa $\times 1{,}8 \times 10^{-3}$ m^3 $\ln 2 = 274$ J.

11 Falso. Il sistema potrebbe ad esempio aver subìto un ciclo, tornando alla fine allo stato iniziale. In tal caso il lavoro compiuto dal gas sarebbe misurato dall'area del ciclo nel piano pV, presa col segno più se il ciclo è stato percorso in senso orario, col segno meno in caso contrario.

12 Il lavoro è dato, esattamente come per un gas perfetto, dall'area racchiusa dal ciclo, presa in questo caso col segno meno dato che il ciclo è stato percorso in senso antiorario. Dunque,
$L = -½\,[(7-2)\,\ell]\,[(3-1)\text{ atm}] = -5\,\ell\cdot\text{atm} = -5 \times 101{,}3\text{ J} = -506\text{ J}.$

13 Falso: il lavoro compiuto non dipende solo dallo stato iniziale e da quello finale, ma dall'intera trasformazione. Nel caso ad esempio della trasformazione quasistatica $1\to2\to3\to$ $\to4$ rappresentata in fig. 8, l'area sottesa dall'isobara $3\to4$ è chiaramente più grande di quella sottesa dall'isobara $1\to2$, il che significa che il lavoro negativo compiuto dal gas durante la trasformazione è, in valore assoluto, più grande del lavoro positivo: il lavoro complessivo è perciò negativo pur essendo il volume finale V_4 maggiore del volume iniziale V_1.

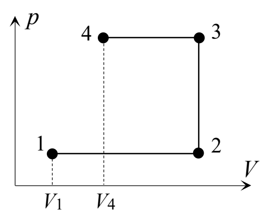

Fig. 8

14 Si tratta chiaramente di un lavoro negativo. Il valore assoluto corrisponde all'area racchiusa dalla circonferenza: si noti a tale proposito che il fatto che il ciclo risulti rappresentato proprio da una circonferenza, piuttosto che da un'ellisse (con assi paralleli agli assi coordinati), è una circostanza del tutto fortuita, legata alla particolare scala di rappresentazione prescelta. Essendo data l'area dell'ellisse da π moltiplicato per il prodotto dei due semiassi, nel nostro caso l'area corrisponde a un lavoro di valore assoluto $\pi \times 1{,}5\,\ell \times 2{,}3\text{ atm} = 10{,}84\,\ell\cdot\text{atm} = 10{,}84\,\ell\cdot\text{atm} \times [101{,}3\text{ J}/(\ell\cdot\text{atm})] =$ $= 1098$ J.

15 La pressione è, per ipotesi, univocamente definita su tutta la superficie del sistema durante l'intera trasformazione: pertanto, il lavoro compiuto in relazione alla variazione del volume è espresso, al solito, dalla relazione $L =$ $= \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$. Trattandosi di un'isobara, sarà semplicemente
$L = p\,(V_2 - V_1)$. Scrivendo l'equazione di stato sia per lo stato finale che per quello iniziale e sottraendo membro a membro si ottiene subito
$p\,(V_2 - V_1) = A\,(T_2^3 - T_1^3) + B\,(T_2 - T_1)$.

16 Se, in una trasformazione politropica di un gas (una trasformazione reversibile descritta da un'equazione del tipo pV^{α} = cost.), l'esponente α è diverso da 1 (se cioè non si tratta di un'isoterma), il lavoro effettuato dal sistema è $L = \Delta(pV)/(1-\alpha)$. Dobbiamo quindi determinare preliminarmente il valore della pressione finale: in base all'equazione di trasformazione risulta
$p_2 = p_1(V_1/V_2)^3 = 5\times10^5$ Pa $(1{,}2/1{,}9)^3 = 1{,}26\times10^5$ Pa. Allora
$L = (p_2V_2 - p_1V_1)/(1-\alpha) =$
$= (1{,}26\times10^5\times1{,}9\times10^{-3} - 5\times10^5\times1{,}2\times10^{-3})$ J $/(1-3) = 180$ J.

17 L'equazione di trasformazione è pV^{γ} = cost., con $\gamma = C_p/C_V = 5/3 = 1{,}67$. Il lavoro effettuato dal gas è $L = \Delta(pV)/(1-\gamma)$. La pressione finale è
$p_2 = p_1(V_1/V_2)^{\gamma} = 1{,}3\times2^{1{,}67} = 4{,}137$ atm. Perciò
$L = [(4{,}137\times0{,}9 - 1{,}3\times1{,}8)]\ \ell\cdot\text{atm}/(1-1{,}67) = -2{,}06\ \ell\cdot\text{atm} =$
$= -2{,}06\times101{,}3$ J $= -209$ J.

18 Dato che sia alla fine che all'inizio l'energia cinetica del sistema mobile pistone + blocco è zero, il lavoro complessivo delle forze applicate a tale sistema è zero: dunque, il lavoro compiuto dal gas è uguale ed opposto al lavoro compiuto dalle altre forze applicate al sistema: il peso P e la forza F prodotta dalla pressione atmosferica. Dato che durante il movimento del pistone tali forze mantengono un valore costante[3], il lavoro da esse compiuto è
$L' = (P+F)(h_1-h_2)$,
dove h indica il livello del pistone. Ma nella situazione finale l'equilibrio del pistone richiede che sia $p_2S = P+F$. Effettuando tale sostituzione si ottiene
$L' = p_2S(h_1-h_2) = p_2(V_1-V_2)$, per cui $L = -L' = p_2(V_2-V_1)$.

[3] A rigore, la spinta atmosferica è un po' più piccola, rispetto al valore di equilibrio, non appena il pistone entra in movimento, e un po' più grande alla fine, quando il pistone rallenta: tali variazioni sono ragionevolmente trascurabili nel presente contesto.